Manual
Prueba de screening 8+

Este proyecto ha sido financiado con el apoyo de la Comisión Europea. Esta publicación refleja únicamente las opiniones del autor y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en ella.

Contenido

I. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas es acumulativo: los nuevos contenidos se basan en conocimientos previos sólidos. Si faltan ideas y conceptos fundamentales, al alumnado le resulta cada vez más difícil construir una comprensión significativa de los temas posteriores. Los resultados de estudios internacionales y nacionales muestran que una parte considerable del alumnado no alcanza los niveles mínimos en matemáticas. Para la enseñanza diaria, esto significa que se necesitan procedimientos tempranos y prácticos para hacer visible el estado del aprendizaje y organizar un apoyo oportuno. Aquí es donde entra en juego el proyecto de la UE «Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM)». En una colaboración entre Alemania, Croacia, España, Francia, Grecia, Italia, y Suecia, se han desarrollado cinco instrumentos de evaluación interrelacionados para proporcionar al profesorado una visión general compacta de su clase en los aspectos de transición educativa. Los aspectos de evaluación siguen un ritmo de dos años:

1. Transición de educación Infantil → Inicio de la educación Primaria
2. Fin del 2.º curso de primaria / inicio del 3.º curso de Primaria
3. Fin del 4.º curso de Primaria/comienzo del 5.º curso de Primaria
4. Fin del 6.º curso de Primaria/ inicio del 1.º curso de ESO
5. Fin del 2.º curso de ESO/ inicio del 3.º curso de ESO

¿Qué es una evaluación screening?

Una evaluación screening es una breve prueba grupal que se puede realizar a toda la clase en una sola sesión. Proporciona una visión general inicial y estructurada de las ideas fundamentales que ya están consolidadas y de las áreas en las que el alumnado puede necesitar apoyo adicional. Es importante destacar que una evaluación screening no sustituye a una evaluación cualitativa individual orientada al proceso del estado del pensamiento matemático del alumnado. Sirve como punto de partida: los resultados pueden ir seguidos de observaciones específicas, entrevistas y medidas de apoyo.

¿Por qué es útil?

- Proporciona una visión general rápida: qué habilidades fundamentales están aseguradas y dónde es útil revisarlas o ampliarlas.
- Permite un apoyo guiado: identifica al alumnado que pueda tener dificultades con los estándares mínimos de matemáticas básicas; organiza un apoyo temprano.
- Sirve para tomar decisiones diagnósticas: los resultados de la evaluación proporcionan una primera orientación clara que indica qué alumnado puede beneficiarse de medidas diagnósticas adicionales (por ejemplo, análisis más profundos de las tareas o entrevistas de seguimiento).
- Apoya las transiciones: centra la atención en las habilidades clave en las transiciones escolares cruciales.

Las tareas están orientadas al aula, su aplicación se describe claramente y la puntuación es rápida. El profesorado recibe un resumen conciso a nivel de clase, además de indicaciones sobre qué alumnado merece una atención más detallada en áreas de contenido específicas. Sobre esta base, se pueden planificar breves periodos de revisión, prácticas diferenciadas o tareas de transición.

Este manual ofrece una guía compacta sobre la finalidad y el uso del instrumento de evaluación, explica el diseño de la prueba, los tipos de tareas y los objetivos de evaluación específicos, proporciona instrucciones claras para la administración en el aula, describe la puntuación y la interpretación de los resultados y ofrece ideas prácticas para la instrucción posterior y el apoyo específico.

El objetivo es ofrecer una herramienta de evaluación práctica, fiable y fácil de usar que proporcione al profesorado una orientación rápida, llame la atención sobre posibles dificultades y apoye de forma concreta una ayuda eficaz para que el mayor número posible de alumnos aprenda matemáticas de forma segura, con comprensión y confianza.

II. ¿Qué se entiende por «destrezas matemáticas clave»?

El desarrollo de pruebas de diagnóstico requiere una base teórica. En el caso de las pruebas de evaluación screening para toda la clase, esto significa centrarse en aquellas habilidades sin las cuales no se pueden aprender los contenidos posteriores de forma significativa. Siguiendo la posición clásica de Gagné y Briggs, cada nueva exigencia de aprendizaje se basa en una cantidad mínima de requisitos previos necesarios, a los que se refiere el término «destrezas matemáticas clave». Si estas no están disponibles, es poco probable que se adquiera con éxito el nuevo contenido y, por lo tanto, las tareas adecuadas se basan en lo que ya se ha aprendido. En matemáticas, el aprendizaje es, por lo tanto, jerárquico y acumulativo.

Comprensión conceptual: competencias, conceptos, destrezas y destrezas clave

En el proyecto DiToM distinguimos entre competencias y destrezas, que son mutuamente dependientes en la práctica del aula. Las competencias se refieren a una disposición perspicaz para actuar de manera adecuada en situaciones matemáticas. De este modo, los conceptos captan una visión sustantiva de las relaciones matemáticas. La activación comprensible de las competencias surge en una destreza, como el rendimiento practicado por parte del alumnado. Las destrezas clave son aquellas cuya ausencia dificulta o impide sustancialmente el aprendizaje posterior. Funcionan como requisitos previos necesarios para contenidos posteriores. Las evaluaciones screening se centran en la aritmética y el álgebra, debido a su estructura jerárquica y a su importancia también para otros ámbitos de las matemáticas (por ejemplo, la geometría), que es compatible tanto a nivel nacional como entre países.

A continuación, se amplían dos ejemplos para aclarar la comprensión de las habilidades clave.

Nivel Primaria: realizar sumas de forma estructurada
La tarea 25 + 7 requiere algo más que contar paso a paso. Se demuestra un sólido sentido de las operaciones cuando el alumnado reconoce las relaciones parte-parte-todo (por ejemplo, 25 y 7 como partes de un todo), descompone los números de forma flexible (por ejemplo, 7 = 5 + 2) y se basa en la siguiente decena (por ejemplo, 25 + 5 = 30; luego +2 = 32). Aquí, los conceptos (valor posicional, igualdad), las competencias (cálculo flexible, procedimiento justificado) y la habilidad resultante (suma estructurada) funcionan conjuntamente. Si falta esta destreza clave, el siguiente «nivel», rangos numéricos más amplios o estrategias más eficientes, sigue siendo difícil de alcanzar.

Nivel ESO: gestión de la ampliación de los dominios numéricos
Un sentido seguro de las operaciones con números naturales (descomposición, operaciones inversas, valor posicional y referencias en la recta numérica) es un requisito previo para transferir procedimientos a decimales y fracciones (por ejemplo, suma/resta, redondeo, estimación) y superar los obstáculos epistemológicos que implica el aprendizaje de conceptos matemáticos (Brousseau, 1997). Las lagunas en estas destrezas clave suelen conducir a un trabajo procedimental sin comprensión, lo que a su vez dificulta el acceso a las expresiones algebraicas, las ecuaciones y las relaciones funcionales. Esto ilustra el carácter predictivo de las habilidades aritméticas clave para las exigencias algebraicas.

La destreza clave de la comprensión se integra en las pruebas para representar los requisitos previos necesarios para el siguiente paso de aprendizaje, y

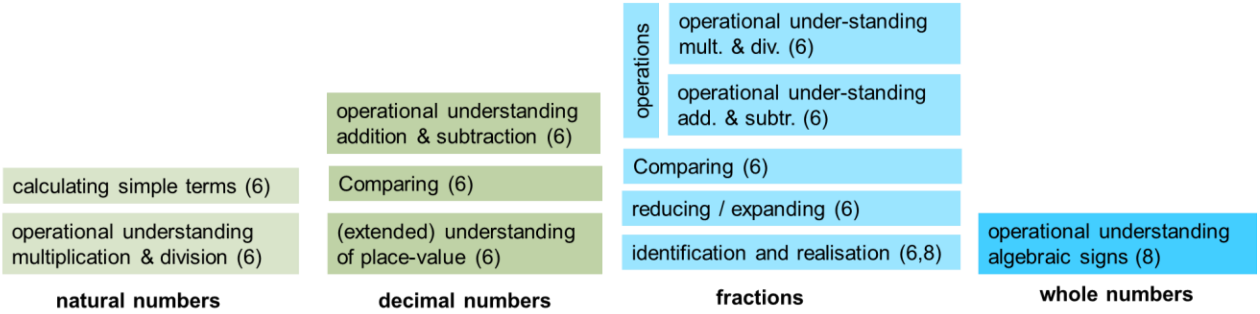
- son próximas al contenido y, por lo tanto, observables con tareas breves, y
- ofrecen al profesorado una primera orientación estructurada sobre qué alumnado puede necesitar más pasos de diagnóstico y dónde se puede dirigir el apoyo. El objetivo no es asignar etiquetas, sino revelar los requisitos previos fundamentales de forma temprana, de modo que el aprendizaje posterior pueda continuar sobre una base estable.

Según DiToM, el desarrollo de las destrezas clave es un proceso continuo a lo largo del aprendizaje, ya que son esenciales para permitir nuevos conocimientos. Por ello, es fundamental identificar y cubrir los requisitos previos que le falte al alumnado de manera temprana.

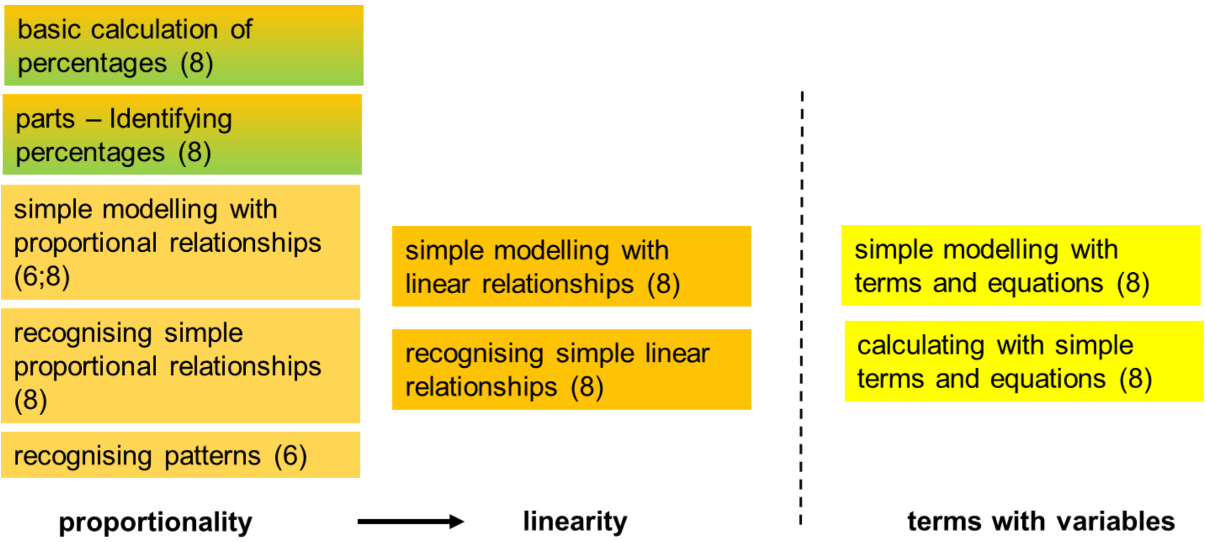
III. Estructura de la prueba screening 6+ y 8+

La estructura de las pruebas en DiToM se basa en las áreas de contenido de aritmética y álgebra y se tiene en cuenta la estructura jerárquica de las áreas de contenido. La construcción de cada prueba se centró en el área del desarrollo y la ampliación del rango numérico en el sentido de un cálculo técnico, en la medida en que los procedimientos de cálculo se llevan a cabo de forma no algorítmica y algorítmica sobre la base de una comprensión fundamental. El diagrama muestra la estructura de la prueba en estas áreas de contenido para los grados 6+ y 8+.

La prueba para el grado 6+ se basa en los componentes básicos del grado 4+, que se centran en los números naturales, y esta área está más diferenciada. Si el alumnado tiene dificultades considerables en el área de los números naturales en el grado 6+, se recomienda utilizar la prueba para el grado 4+.



En el área de álgebra o preálgebra, se evalúa la comprensión estructural de estructuras matemáticas simples en aplicaciones matemáticas internas y externas bajo el aspecto de la proporcionalidad y la linealidad. Del mismo modo, en el área de términos con números o variables en diferentes direcciones en situaciones de aplicación básica, así como para la comprensión de términos, en la medida en que forma parte de una comprensión básica.



IV. Realización de la prueba screening DiToM

Explique el propósito de la prueba al alumnado y tranquilícelo.

- La prueba no se califica.
- Permite hacer un balance de lo que sabe y lo que no sabe el alumnado, para que luego se puedan sugerir ejercicios adecuados. Por lo tanto, es especialmente importante que el alumnado trabaje de manera individual.
- Hay que hacer hincapié en la importancia de completar los ejercicios. Cuantas más preguntas responda el alumnado, más fácil será identificar sus conocimientos, habilidades y dificultades, y ayudar a superarlas.
- También se puede decir que es la primera vez que se utiliza esta prueba y que las personas que la han diseñado quieren saber si es adecuada.

Estructura de la prueba

- La prueba se divide en tres partes, cada una de las cuales consta de varios ejercicios.
- Todos los ejercicios son independientes entre sí.

Duración: se estima una duración máxima para cada parte.

- Prueba de grado 6+, máximo 45 minutos: 15 para preálgebra, 10 para proporcionalidad y 20 para aritmética.
- Examen de grado 8+, máximo 40 minutos: 15 para preálgebra, 10 para proporcionalidad, 15 para aritmética.

Es importante indicar al alumnado la duración de cada parte antes de realizar la prueba, y que el profesorado recogerá la prueba del alumnado que no haya terminado, por motivos de equidad entre los alumnos y alumnas.

Formato de los ejercicios

- Ejercicios abiertos: hay espacio para responder (ya sea con frases o con un número).
- Ejercicios cerrados (preguntas de opción múltiple): se proponen varias respuestas y el estudiante debe responder eligiendo solo una. Indique al alumnado que, si decide cambiar su respuesta de opción múltiple, debe escribir «No» junto a la primera respuesta y «Sí» junto a la nueva.

Cómo responder

- No se permiten calculadoras.
- El alumnado puede utilizar cualquier parte de la página que haya quedado en blanco como borrador, en particular para anotar sus cálculos.
- El alumnado puede realizar las tres partes por orden, a su propio ritmo. El alumnado que haya completado una parte de la prueba debe esperar a que el profesor le dé instrucciones para continuar con la siguiente parte.

Solicitar ayuda a los alumnos durante la prueba

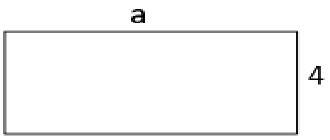
- Si se solicita ayuda al profesorado, este no dará ninguna indicación que pueda orientar la respuesta a las preguntas. El objetivo es identificar las dificultades del alumnado.

V. Presentación de las tareas

Tarea 1.1: Perímetro de un rectángulo

El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

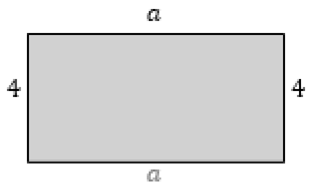
¿Cuál es la fórmula del perímetro (P) del rectángulo?



P = __**2a + 8**__

Solución

Se deben sumar las longitudes de los cuatro lados.



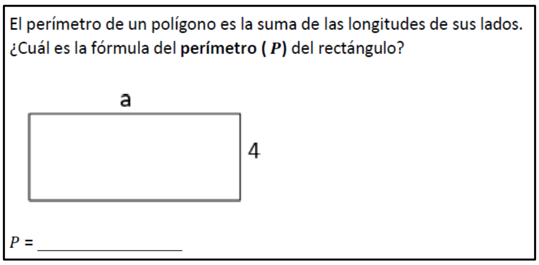
Aunque la tarea pida «la» fórmula, hay varias respuestas (equivalentes) correctas.

Por ejemplo:

$a + 4 + a + 4$ (o $a + a + 4 + 4$, o términos en cualquier orden)

$2a + 8$ (o $2(a + 4)$ o $(a + 4)\cdot 2$ o $2\cdot a + 2\cdot 4$)

Destreza clave evaluada con esta tarea


El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.
¿Cuál es la fórmula del **perímetro (P)** del rectángulo?

P = ______________

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para construir una fórmula simbólica para el perímetro de un rectángulo cuando se le dan las longitudes de los lados en forma algebraica. El rectángulo está etiquetado con las longitudes de los lados a y 4, y la tarea requiere que el alumnado exprese el perímetro P como una expresión general, en lugar de calcular un valor numérico. Para resolver la tarea correctamente, los estudiantes deben comprender que un rectángulo tiene dos pares de lados iguales y aplicar la fórmula:

P=2·(a + 4)

P=(a+4) ·2

o, de forma equivalente: P=2a + 8 P = 2a + 2 · 4

O: a+4+a+4 o similar

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Esta tarea favorece el desarrollo del pensamiento algebraico al animar al alumnado a representar relaciones entre cantidades utilizando variables. Dentro del marco DiToM la construcción de este tipo de fórmulas es esencial para desarrollar la fluidez simbólica y comprender las relaciones funcionales. Conecta el razonamiento geométrico (perímetro) con la expresión algebraica y refuerza el uso de variables como números generalizados. Esta habilidad también prepara a los alumnos para trabajar posteriormente con funciones, modelos parametrizados y resolución de ecuaciones.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Un error frecuente del alumnado es malinterpretar la naturaleza de la tarea, tratándola como un problema de cálculo concreto en lugar de uno de generalización simbólica. En vez de reconocer que "a" es una variable que requiere una fórmula, muchos intentan darle un valor numérico midiendo el diagrama o usando estimaciones. Además, se evidencia una confusión conceptual entre área y perímetro, ya que algunos alumnos proporcionan la fórmula del área del rectángulo como respuesta para el perímetro.

En conjunto, estos errores indican debilidades en:

- Comprensión del papel de las variables
- La distinción entre diferentes conceptos geométricos
- Interpretación precisa de las instrucciones matemáticas

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El alumnado se beneficia de la práctica que separa claramente las tareas que requieren fórmulas de aquellas que requieren resultados numéricos. El profesorado puede utilizar rectángulos recortados o manipulativos digitales en los que el alumnado etiqueta los lados con letras y «camina» alrededor de la forma para contar la longitud total. Los apoyos visuales, como las fichas de álgebra o los marcos de perímetro, ayudan a ilustrar por qué los lados opuestos son iguales y deben sumarse dos veces. Fomentar las formulaciones verbales («dos veces la suma de a y 4») ayuda a tender un puente entre la comprensión concreta y la notación algebraica. Además, algunas tareas (por ejemplo, «1) Escribe una fórmula para el perímetro, en términos de la variable desconocida a; 2) Utiliza la fórmula para calcular el valor del perímetro para a=5») pueden entrenar al alumnado a leer las instrucciones con precisión.

Tarea 1.2: Traducción de frases a expresiones algebraicas

Traduce cada frase a una expresión algebraica:

a) La suma de 3 y x **$3 + x$**

b) 3 menos que x **$x - 3$**

c) El doble de a **$2a$**

Solución

a) La suma de 3 y x se puede escribir como$3 + x$ o $x + 3$.

b) 3 menos que$x$ se puede escribir como $x - 3$ (o $x + (-3)$ o $-3 + x$) .

c) El doble de a se puede escribir como $2 \cdot a$ o $2a$ o $a + a$.

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta serie de tareas evalúa la capacidad del alumnado para traducir el lenguaje cotidiano a notación algebraica. Cada parte (a-c) presenta una estructura verbal diferente que se corresponde con una expresión simbólica sencilla. En la parte a) (*la suma de 3 y x*), el objetivo es reconocer la estructura aditiva (3 + x). La parte b) (*3 menos que x*) evalúa si el alumnado refleja correctamente una relación sustractiva con el orden correcto de los operandos (x − 3). La parte c) (*el doble de a*) exige la multiplicación como escala (2a)

Traduce cada frase a una expresión algebraica:

a) La suma de 3 y x

b) 3 menos que x

c) El doble de a

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Esta tarea combina las convenciones algebraicas básicas con la precisión lingüística, pidiendo al alumnado que navegue entre el lenguaje natural y la expresión simbólica.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Esta tarea revela conceptos erróneos característicos en diferentes niveles. En la parte b) (*3 menos que x*), muchos estudiantes invierten incorrectamente el orden y escriben 3 − x, interpretándolo como «3 menos x» en lugar del x − 3 pretendido. Esto indica una dificultad para reconocer la dirección relacional en las estructuras verbales. Un error es la confusión entre cuadrado y doble, que se comete con frecuencia.

En conjunto, estos errores indican si el alumnado es capaz de analizar la estructura verbal, respetar la sintaxis algebraica y comprender las convenciones matemáticas estándar.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Para reforzar esta habilidad, la enseñanza debe hacer hincapié en la estructura del lenguaje en relación con la forma simbólica. Es esencial enseñar explícitamente frases como «menos que», «más que», «el producto de» y «el cuadrado de», idealmente con ejemplos contrastados. Los organizadores visuales que emparejan frases con formas algebraicas pueden ayudar a la memorización y a la comprensión estructural. Por último, animar al alumnado a verbalizar sus expresiones («*x menos 3* significa que empiezo con x y resto 3») fomenta la precisión reflexiva y conecta el lenguaje más firmemente con el significado matemático.

Tarea 1.3: Construcción de una expresión a partir de una descripción de varios pasos

Laura tiene 10 libros más que Jenny. Kevin tiene el doble de libros que Laura.

¿Cuál es el número de libros de Kevin si el número de libros de Jenny es n?

a) $10 + n$

b) $10 + n + 2$

c) $2 \cdot (n + 10)$

d) $2 \cdot n + 10$

Solución

Primera solución, para un estudiante acostumbrado a trabajar con variables:

Paso 1: Jenny tiene$n$ libros

Paso 2: Laura tiene 10 libros más que Jenny, por lo que Laura tiene$n + 10$ libros.

Paso 3: Kevin tiene el doble de libros que Laura, por lo que Kevin tiene$2 \cdot (n + 10)$ libros.

Segunda solución, basada en notación informal:

Laura = Jenny + 10

Kevin =2 · Laura =2 · (Jenny + 10) = $2 \cdot (n + 10)$

Tercera solución, basada en probar con un número y luego generalizar:

Supongamos que Jenny tiene 17 libros. Entonces Laura tiene$17 + 10 = 27$ libros y Kevin tiene$2 \cdot 27 = 54$ libros. El número 17 está oculto en 27 y la respuesta es$2 \cdot 27 = 2 \cdot (17 + 10)$.

Al generalizar sustituyendo 17 por n , se obtiene la respuesta$2 \cdot (n + 10)$.

Destreza clave evaluada con esta tarea

Laura tiene 10 libros más que Jenny.
Kevin tiene el doble de libros que Laura.

¿Cuál es el número de libros de Kevin si el número de libros de Jenny es n?

a) $10 + n$
b) $10 + n + 2$
c) $2 \cdot (n + 10)$
d) $2 \cdot n + 10$

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para traducir una descripción de dos pasos en una expresión simbólica. El problema describe que Jenny tiene x libros, Laura tiene 10 más que Jenny y Kevin tiene el doble que Laura. Para resolver correctamente la tarea, el alumnado debe reconocer que la cantidad de Laura se expresa como n + 10 y luego aplicar la multiplicación para hallar el total de Kevin, lo que da como resultado la expresión 2 · (n + 10). Esto exige prestar atención tanto a la secuencia de relaciones como al papel estructural de la agrupación en las expresiones algebraicas (esto se hace con paréntesis).

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

La capacidad de construir expresiones simbólicas a partir de descripciones relacionales es fundamental en álgebra. Demuestra la capacidad del estudiante para identificar dependencias funcionales y codificarlas estructuralmente basándose en la función de los paréntesis. Dentro del marco DiToM esta tarea representa una destreza matemática clave porque requiere la coordinación de múltiples cantidades y operaciones y apoya la transición del razonamiento aritmético a la generalización algebraica. Al trabajar con marcadores de posición abstractos y operaciones anidadas, los estudiantes comienzan a pensar en términos de relaciones entre variables, un paso esencial hacia el modelado, la resolución de ecuaciones y el razonamiento funcional.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Un error común es que el alumnado simplifique la estructura prematuramente dando la expresión 2n + 10 en lugar de la correcta 2 · (n + 10), lo que indica que no se tuvo en cuenta la prioridad de la multiplicación sobre la suma. Algunos pueden detenerse después de la primera relación y simplemente escribir n + 10, lo que representa los libros de Laura en lugar de los de Kevin. Un malentendido frecuente, 10+n+2, también radica en interpretar «el doble» como un aumento independiente en lugar de una multiplicación, o en ignorar la prioridad de la multiplicación con respecto a la suma, lo que puede dar lugar a una interpretación errónea del cálculo previsto. En algunos casos, el alumnado puede confundir los caracteres o el flujo de información, lo que indica que tiene dificultades para extraer o retener múltiples enunciados relacionales del texto. Estas dificultades apuntan a lagunas en la comprensión estructural, especialmente cuando se combinan el razonamiento aditivo y el multiplicativo en forma simbólica.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El alumnado se beneficia de una explicación verbal explícita de las relaciones, guiada por preguntas como «¿Qué tiene Laura en términos de los libros de Jenny?» y «¿Qué hace Kevin con la cantidad de Laura?». El uso de ayudas visuales, como diagramas de relaciones o recuadros, ayuda a que estas conexiones sean más tangibles. Además, practicar la traducción de lo verbal a lo simbólico con relaciones más sencillas de un solo paso ayuda a ganar confianza antes de combinar pasos. La instrucción también debe abordar explícitamente el uso de paréntesis, contrastando expresiones como 2n + 10 y 2 · (n + 10) con ejemplos numéricos concretos (por ejemplo, con una hoja de cálculo) para ilustrar el impacto de la estructura. Animar al alumnado a articular su razonamiento en voz alta ayuda a reforzar tanto la lógica operativa como el significado algebraico.

Tarea 1.4: Construcción de una expresión algebraica a partir de una descripción

Un grupo de 13 amigos va al cine. Cada uno paga una entrada de x € y compra palomitas por 3,20 €.

¿Cuál de las siguientes expresiones indica el precio pagado por todo el grupo?

a) $13 + (x + 3{,}20)$

b) $x \cdot (13 + 3{,}20)$

c) $13 \cdot x + 3{,}20$

d) $13 \cdot (x + 3{,}20)$

Solución

Primera solución

Cada persona paga $x + 3{,}20$ y 13 personas pagan 13 veces lo que paga una persona. Por lo tanto, la respuesta es $13 \cdot (x + 3{,}20)$.

Segunda solución, basada en pruebas con un número y generalizando:

Supongamos que una entrada cuesta 5 €.

Cada persona paga un boleto de 5 € y compra palomitas por 3,20 €, por lo que cada persona paga 8,20 €.

13 personas pagan 13 veces esa cantidad:$13 \cdot 8{,}20$. No es necesario calcular este producto, lo importante es lo que ha ocurrido con el número elegido, el 5: $13 \cdot 8{,}20 = 13 \cdot (\mathbf{5} + 3{,}20) = 13 \cdot (x + 3{,}20)$.

La segunda solución también se puede ejecutar por comparación e imitación («sigue el número»):

Con el número	Con variable
$5 + 3{,}20$	$x + 3{,}20$
$13 \cdot (5 + 3{,}20)$	$13 \cdot (x + 3{,}20)$

Destreza clave evaluada con esta tarea

Un grupo de 13 amigos va al cine. Cada uno paga una entrada de x € y compra palomitas por 3,20 €.
¿Cuál de las siguientes expresiones indica el precio pagado por todo el grupo?

a) $13 + (x + 3{,}20)$
b) $x \cdot (13 + 3{,}20)$
c) $13 \cdot x + 3{,}20$
d) $13 \cdot (x + 3{,}20)$

Esta tarea requiere que el alumnado traduzca una situación escrita en una expresión algebraica estructurada. El contexto se presenta por escrito: 13 amigos compran cada uno una entrada de cine por x euros y gastan 3,20 € adicionales en palomitas. El coste total para el grupo debe representarse mediante una expresión que combine ambos componentes (la variable y la constante) y multiplique el coste individual total por el número de personas. Por lo tanto, la expresión correcta es 13 · (x + 3,20). Para seleccionar la solución correcta, el alumnado debe comprender la estructura narrativa y saber cómo modelar la suma repetida mediante la multiplicación utilizando paréntesis.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Representar situaciones en contexto como expresiones algebraicas refleja una destreza básica en el modelado matemático. Esta tarea ejemplifica una transición fundamental del razonamiento aritmético a la estructuración algebraica: en lugar de calcular o estimar, se pide al alumnado que generalice y represente una relación. Según el marco DiToM esta capacidad desempeña un papel central en el desarrollo del pensamiento funcional, la conciencia estructural y una comprensión flexible del uso de variables. También favorece una comprensión profunda de las operaciones, la agrupación y la propiedad distributiva, habilidades esenciales para la manipulación de expresiones y ecuaciones.

¿Qué tipo de errores y otras señales de advertencia pueden esperarse en esta tarea?

Muchos estudiantes tienden a pasar por alto la necesidad de utilizar paréntesis y seleccionan expresiones como 13x +

3,20. Otros pueden invertir la multiplicación, eligiendo x + 13 · 3,20, o representar erróneamente solo una parte de la situación. Estas opciones distractoras están diseñadas deliberadamente para revelar conceptos erróneos específicos: por ejemplo, no aplicar la estructura distributiva o malinterpretar cómo se modela la repetición de los costes en álgebra. En algunos casos, el alumnado también opta por la opción que parece más sencilla numéricamente sin analizar el significado que hay detrás, lo que sugiere una lectura superficial o una dependencia de la heurística en lugar del razonamiento relacional.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Para reforzar la comprensión del alumnado, puede ser útil visualizar el escenario mediante tablas o diagramas, mostrando una fila por persona y sumando los costes por columnas. El modelado explícito de tareas similares, como «cada persona paga x € y y €, ¿cuál es el total para n personas?», familiariza con las estructuras de agrupación. Hacer hincapié en el uso de paréntesis mediante frases orales («el total por persona, luego multiplicado por 13») ayuda al alumnado a transferir las estructuras verbales a la forma algebraica. Además, los debates en los que se comparan las opciones dadas y se evalúa lo que representa cada expresión pueden ayudar a desarrollar estrategias metacognitivas para interpretar las opciones simbólicas. Anime también al alumnado (que no sabe por dónde empezar) a que comience probando con cualquier número (elegido por él mismo).

Tarea 1.5: Expresión algebraica asociada una secuencia de varios pasos

Un cálculo se define en los siguientes pasos:

- Elige un número x
- Suma 4 a x
- Multiplica el resultado por 8

¿Cuál de las siguientes expresiones indica el cálculo?

a) $8 \cdot x + 4$

b) $x + 4 \cdot 8$

c) $(x + 4) \cdot 8$

d) $(8 \cdot 4) + x$

Solución

Primera solución, en dos pasos.

Paso 1: Al sumar 4 a x se obtiene el resultado $x + 4$

Paso 2: Multiplicar el resultado $x + 4$ por 8 da la respuesta $8 \cdot (x + 4) = (x + 4) \cdot 8$.

Segunda solución, basada en probar con un número y generalizar: Supongamos que $x = 17$.

Paso 1: Al sumar 4 a 17 se obtiene el resultado $17 + 4 = 21$

Paso 2: Al multiplicar el resultado 21 por 8, se obtiene la respuesta $21 \cdot 8$.

Paso 3: Analiza lo que ha ocurrido con 17:$21 \cdot 8 = (17 + 4) \cdot 8 = (x + 4) \cdot 8$.

Al igual que en la solución de la tarea anterior, también podemos «seguir el número» para encontrar la respuesta:

Con el número	Con variable
$17 + 4$	$x + 4$
$8 \cdot (17 + 4)$	$8 \cdot (x + 4)$

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea pide a los estudiantes que representen un cálculo secuencial, concretamente, que expresen simbólicamente el resultado de sumar 4 a x y luego multiplicar el resultado por 8. Aunque las instrucciones mencionan pasos adicionales, las opciones de respuesta solo se refieren a esta primera cadena de operaciones. La expresión correcta en este contexto reducido es (x + 4) · 8, lo que requiere que los estudiantes mantengan el orden de las operaciones agrupando x + 4 antes de aplicar la multiplicación.

Un cálculo se define en los siguientes pasos:

- Elige un número x
- Suma 4 a x
- Multiplica el resultado por 8

¿Cuál de las siguientes expresiones indica el cálculo?

a) $8 \cdot x + 4$
b) $x + 4 \cdot 8$
c) $(x + 4) \cdot 8$
d) $(8 \cdot 4) + x$

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comprender y representar la estructura jerárquica de las operaciones es una habilidad fundamental en álgebra. Permite al alumnado pasar de interpretar la aritmética paso a paso a organizar estos pasos en una forma simbólica estructurada. Según el marco DiToM, esto forma parte del desarrollo de las competencias de modelización simbólica, especialmente el uso de paréntesis para aclarar la precedencia de las operaciones. Esto no solo es crucial para evaluar correctamente las expresiones, sino también para desarrollar la confianza en la manipulación de fórmulas y la resolución de ecuaciones más adelante.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Los distractores se eligen cuidadosamente para revelar malentendidos estructurales específicos. Por ejemplo, $8 \cdot x + 4$ representa el error de realizar la multiplicación demasiado pronto y luego sumar incorrectamente 4, violando la agrupación prevista. La opción $x + 4 \cdot 8$ muestra una lectura lineal y una precedencia errónea, en la que el alumnado aplica la multiplicación antes de la suma sin utilizar paréntesis. $8 \cdot 4 + x$ ignora por completo la estructura, lo que sugiere un enfoque superficial en los números involucrados en lugar de en la relación. Estas opciones de respuesta no son aleatorias, sino que indican si un estudiante comprende cómo afectan los paréntesis al orden de las operaciones y si es capaz de analizar instrucciones verbales de varios pasos de forma estructural en lugar de secuencial.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El apoyo debe tener como objetivo reforzar la conciencia del alumnado sobre los paréntesis y su comprensión de la precedencia de las operaciones. Un enfoque útil es dejar que el alumnado verbalice cada paso y luego agrupe físicamente las expresiones utilizando tarjetas o códigos de colores. Se le debe animar a comparar expresiones como $x + 4 \cdot 8$ y $(x + 4) \cdot 8$ con sustituciones numéricas (por ejemplo, $x = 2$) para comprobar si la estructura coincide con el significado deseado. Explicar por qué son necesarios los paréntesis en este contexto favorece el razonamiento simbólico y ayuda a los alumnos a ir más allá de la traducción procedimental hacia una comprensión genuina. El alumnado también puede empezar probando números elegidos por él mismo y generalizando su cálculo.

Tarea 1.6: Valor numérico de una expresión con sustitución de variables

¿Cuál es el valor de $1 + 3x\ para\ x = 8$?

a) 25

b) 32

c) 39

d) 48

Solución

La clave para resolver este problema es tener en cuenta que $3x = 3 \cdot x$ debe calcularse antes de añadir el número 1.

Solución en un solo paso: Establecer $x = 8$ y calcular.

$$1 + 3x = 1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25$$

Solución en dos pasos: Establece$x = 8$. Primero calcula $3x = 3 \cdot 8 = 24$. A continuación, calcula$1 + 24 = 25$. Para obtener una mejor visión general de los cálculos en dos pasos, podemos presentarlos en filas separadas:

$$x = 8$$

$$3x = 3 \cdot x = 3 \cdot 8 = 24$$

$$1 + 3x = 1 + 24 = 25$$

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para evaluar una expresión algebraica sustituyendo un valor dado por la variable y aplicando el orden correcto de las operaciones. En concreto, se da a los estudiantes la expresión *1 + 3x* y deben calcular su valor para x = 8. Reconociendo que 3x significa 3 veces x, el procedimiento correcto es multiplicar primero:

¿Cuál es el valor de $1 + 3x\ para\ x = 8$?

a) 25
b) 32
c) 39
d) 48

1+3·8=1+24=25

El alumnado debe sustituir correctamente la variable y luego ejecutar las operaciones en el orden adecuado, respetando la prioridad de las operaciones.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

La sustitución es uno de los procesos más fundamentales del álgebra y constituye un puente entre las expresiones simbólicas y el razonamiento numérico. Dentro del marco DiToM, evaluar expresiones sustituyendo valores ayuda a desarrollar la fluidez operativa, el sentido simbólico y la confianza con las variables. Estas habilidades son fundamentales para trabajar con funciones, construir tablas y gráficos y resolver problemas del mundo real de forma algebraica. También promueve una comprensión flexible de la estructura matemática, especialmente la relación entre los símbolos, las operaciones y su significado.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Los errores más comunes son la mala comprensión de la estructura de la expresión o la aplicación incorrecta del orden de las operaciones. Algunos estudiantes pueden calcular 1 + (3 + 8) = 12, interpretando erróneamente 3x como 3 + x en lugar de 3 veces x. Otros pueden evaluar incorrectamente 3x como 38 (concatenando 3 y 8), lo que refleja una mala interpretación simbólica más que un error de cálculo. Los estudiantes que eligen 32 pueden haber sumado primero 1 a 8 y luego multiplicado la suma por 3: (1 + 8) · 3 = 27, o haber leído mal el término como (1 + 3) · 8 = 32, introduciendo paréntesis no deseados. Seleccionar 39 o 48 puede sugerir una duplicación incorrecta, una estimación arbitraria o un desprecio total por el orden. Estos distractores revelan si los alumnos comprenden cómo funcionan las variables dentro de las expresiones y cómo funciona el orden de las operaciones sin paréntesis explícitos.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

La enseñanza debe hacer hincapié en la lectura de expresiones algebraicas de forma estructural y no procedimental. El profesorado puede apoyar el aprendizaje animando al alumnado a verbalizar las expresiones («uno más tres veces x») y relacionarlas con el valor num´rico. El uso de tablas de sustitución que separan claramente cada operación ayuda a aclarar la estructura. Las actividades de comparación, como evaluar tanto 1 + 3x como (1 + 3)x, ayudan a resaltar cómo los paréntesis cambian el significado, mientras que las herramientas dinámicas pueden permitir al alumnado probar varios valores de forma interactiva. El refuerzo del orden de las operaciones mediante la práctica estructurada, especialmente en contextos sin paréntesis, favorece la precisión y la fluidez a largo plazo.

Tarea 1.7: Identificación de la solución de una ecuación lineal

La igualdad $7x + 3 = 80$ se verifica para:

a) $x = 7$

b) $x = 8$

c) $x = 10$

d) $x = 11$

Solución

Primera solución, basada en probar los cuatro números:

x	7	8	10	11
$7x + 3$	$49 + 3 = 52$	$56 + 3 = 59$	$70 + 3 = 73$	$77 + 3 = 80$

Coincide con el número dado 80 en la ecuación

Segunda solución, basada en el cálculo de $7x + 3$ con algunos de los números sugeridos: Podemos empezar con cualquiera de los cuatro números, por ejemplo, $x = 10$, que da el cálculo simple

$7x + 3 = 7 \cdot 10 + 3 = 70 + 3 = 73$ (no coincide con 80)

La respuesta 73 es menor que 80, por lo que necesitamos un número mayor que 10. El único número de este tipo entre los cuatro es$x = 11$, que da el cálculo

$7x + 3 = 7 \cdot 11 + 3 = 77 + 3 = 80$ (coincide con el número dado 80 en la ecuación)

Por lo tanto, podemos concluir que la respuesta correcta es $x = 11$.

Tercera solución, resolviendo simbólicamente (versión corta):

$7x + 3 = 80$ (restar 3)

$7x = 77$ (dividir por 7)

$$x = \frac{77}{7} = 11$$

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea evalúa si el alumnado comprende el concepto de ecuación lineal y puede determinar si un número dado es una solución sustituyendo valores. Se presenta a los estudiantes la ecuación *7x + 3 = 80* y se les pide que identifiquen el valor de x que hace que esta afirmación sea verdadera. La respuesta correcta es x = 11, ya que al sustituir este valor se obtiene una ecuación verdadera: 7·11+3=80

La igualdad $7x + 3 = 80$ se verifica para:

a) $x = 7$
b) $x = 8$
c) $x = 10$
d) $x = 11$

Para responder correctamente, el alumnado no solo debe realizar el cálculo, sino también comprender que la solución de una ecuación es un número que equilibra ambos lados.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comprender las ecuaciones como afirmaciones de igualdad y saber cómo verificarlas es fundamental para el álgebra. En el marco DiToM esta competencia pertenece al área de interpretación simbólica y razonamiento de igualdad. Prepara al alumnado para resolver ecuaciones de forma sistemática y comprobar si una solución candidata satisface una ecuación. Esta comprensión favorece el pensamiento algebraico de nivel superior y refuerza el sentido numérico a través del razonamiento inverso y el control operativo.

¿Qué tipo de errores y otras señales de advertencia se pueden esperar con esta tarea?

Algunos estudiantes pueden sustituir los valores mecánicamente, pero cometer errores de cálculo al evaluar 7x+ 3. Otros pueden malinterpretar lo que pide la ecuación, interpretando la expresión como una tarea de cálculo en lugar de una afirmación condicional. Un error común es seleccionar x = 10, simplemente porque «parece cercano», lo que sugiere una estimación en lugar de un razonamiento. Algunos podrían elegir x = 8 o x = 7 basándose en conjeturas o sustituciones incompletas, posiblemente deteniéndose una vez que el lado izquierdo parece cercano a 80. O sustituyendo x por 7 como dígito de un número en el sistema decimal. Estos errores revelan lagunas en la comprensión del significado de la igualdad, así como debilidades en los procedimientos de sustitución y en la precisión aritmética.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Se debe guiar al alumnado a través de actividades que enfaticen lo que significa que un valor satisfaga una ecuación. Las tablas de sustitución estructuradas, en las que el alumnado comprueba múltiples valores para una sola ecuación, ayudan a desarrollar la intuición. El profesorado también puede fomentar la reflexión verbal («¿El lado izquierdo es igual al lado derecho?») y promover estrategias de estimación junto con cálculos exactos. El uso de metáforas de balanza o manipulativos ayuda a comprender conceptualmente la igualdad. Por último, dar al alumnado la oportunidad de crear sus propias ecuaciones y probar valores ayuda a fomentar la apropiación y una comprensión más profunda de las relaciones entre variables.

Tarea 2.1: Resolución de un problema de razonamiento proporcional en un contexto del mundo real

2 kg de patatas cuestan 2,40 €. Calcula el precio de 5 kg.

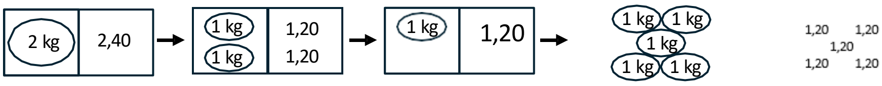
6

Solución

Solución basada en la escala (creativa): 2 kg cuestan 2,40 €, por lo que 4 kg cuestan 4,80 €. 1 kg adicional cuesta 1,20 €, por lo que 5 kg cuestan4,80 + 1,20 = 6 €.

Segunda solución, basada en la reducción a una unidad: 2 kg cuestan 2,40 €, por lo que 1 kg cuesta 1,20 €. 5 kg cuestan 5 veces más:5 · 1,20 = 6 .

Ambas soluciones pueden apoyarse con imágenes. Por ejemplo, en relación con la última solución:



Con notación simbólica semiformal:

2 kg : 2,40 € (dividir por 2)

1 kg : 1,20 € (multiplicar por 5)

5 kg : 6 €

Destreza clave evaluada con esta tarea

2 kg de patatas cuestan 2,40 €. Calcula el precio de 5 kg.

Esta tarea requiere que el alumnado aplique el razonamiento multiplicativo para resolver un problema de proporcionalidad integrado en un contexto cotidiano familiar. Dado que 2 kg de patatas cuestan 2,40 €, los alumnos deben determinar el precio de 5 kg. Esto implica reconocer una tasa constante por kilogramo (1,20 € por kg) y escalarla a una nueva cantidad. El enfoque correcto consiste en aplicar el razonamiento de la tasa unitaria (dividir 2,40 € entre 2 y multiplicar por 5) o construir y resolver una proporción. O bien interpretar 5 = 2 + 2 + 1 y sumar 2,40 + 2,40 + 1,20. La tarea evalúa no solo la capacidad procedimental, sino también la comprensión conceptual de cómo las cantidades crecen en proporción directa.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

El razonamiento proporcional es una piedra angular del pensamiento matemático. Permite al alumnado interpretar y modelar relaciones del mundo real que implican escalado, tasas unitarias y comparaciones multiplicativas. Dentro del marco DiToM, este tipo de tarea apoya pasos clave en el desarrollo del pensamiento funcional y prepara al alumnado para temas avanzados como las funciones lineales y los cálculos porcentuales. Además, promueve el sentido numérico y la flexibilidad en la aplicación de diferentes estrategias a situaciones proporcionales.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

El alumnado puede utilizar incorrectamente el razonamiento aditivo, como calcular «2 kg → 2,40 €, por lo que 5 kg → 2,40 € + 5 €» u otros saltos inconsistentes, lo que indica que no comprende la estructura proporcional. Algunos estudiantes pueden intentar escalar por 2 y luego restar (por ejemplo, 2 kg → 2,40 €, 4 kg → 4,80 €, y luego derivar de alguna manera 5 kg a partir de ahí), lo que puede reflejar el uso parcial de la estrategia sin adquirir los requisitos previos necesarios. Hay estudiantes que simplemente adivinan un precio que «parece razonable», lo que demuestra una familiaridad superficial con el contexto, pero un razonamiento cuantitativo débil. Los errores también pueden surgir de un cálculo inexacto o de una división incorrecta (por ejemplo, dividir 5 por 2,40 en lugar de lo contrario). Estos patrones indican lagunas en la lógica de la escala, la comprensión de la tasa unitaria o la interpretación de las cantidades de la vida real.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El apoyo debe centrarse en desarrollar una sólida comprensión intuitiva y procedimental de la proporcionalidad. El uso de líneas numéricas dobles o tablas de proporciones permite al alumnado visualizar las relaciones y escalar de forma incremental. El profesorado puede plantear preguntas verbales de apoyo como «¿Cuánto cuesta 1 kg?» o «¿Qué pasa si compras el doble?». Fomentar múltiples estrategias (tasa unitaria, establecimiento de proporciones, escalado por pasos) ayuda al alumnado a desarrollar flexibilidad y hábitos de comprobación de errores. Vincular estos problemas con experiencias de compra reales también puede reforzar el compromiso y la comprensión.

Tarea 2.2: Resolución de un problema que implique proporcionalidad inversa

Si usando cuatro grifos iguales una piscina ha tardado 6 horas en llenarse, ¿cuántos grifos iguales se necesitarán para llenar una piscina con la misma capacidad en 2 horas?

12

Solución

Solución basada en el razonamiento proporcional: dado que cuatro grifos llenan la piscina en 6 horas, cada grifo llena 1/4 de piscina en 6 horas y un 1/12 de piscina en 2 horas. Concluimos que se necesitan 12 grifos para llenar la piscina en 2 horas

Para apoyar el razonamiento paso a paso, esta solución se puede presentar en notación semisimbólica:

4 grifos 1 piscina en 6 horas

1 grifo 1/4 piscina en 6 horas

1 grifo 1/12 piscina en 2 horas

12 grifos 1 piscina in 2 horas

Razonamiento similar, basado en una fórmula: El volumen del agua añadida es proporcional a(nº de grifos) · (tiempo). Sabemos que (ignorando las unidades)

(4 grifos) · (6 horas) = 1 piscina

(1 grifo) · (6 horas) = 1/4 piscina

(1 grifo) · (2 horas) = 1/12 piscina

(12 grifos) · (2 horas) = 1 piscina

Destreza clave evaluada con esta tarea

> Si usando cuatro grifos iguales una piscina ha tardado 6 horas en llenarse, ¿cuántos grifos iguales se necesitarán para llenar una piscina con la misma capacidad en 2 horas?

Esta tarea implica una situación del mundo real en la que el alumnado debe comprender la relación entre el tiempo y la cantidad en un proceso de llenado. Concretamente, cuatro grifos idénticos llenan una piscina en 6 horas. La pregunta ahora es: ¿cuántos grifos se necesitan para llenar la misma piscina en solo 2 horas? Para resolver la tarea, el alumnado debe reconocer que cuanto más rápido se deba completar la tarea, más grifos se necesitarán. Aunque no se indica explícitamente, esto describe un caso de proporcionalidad inversa, en el que una cantidad aumenta a medida que la otra disminuye. Una estrategia válida y accesible consiste en organizar los valores conocidos y deseados en una tabla o un diagrama de proporciones:

Número de grifos	Tiempo (en horas)
4	6
?	2

A partir de aquí, el alumnado puede deducir que, dado que el tiempo se divide por 3 (de 6 a 2 horas), el número de golpes debe multiplicarse por 3, lo que da como resultado: 4·3=12 golpes.

Esta estrategia hace hincapié en el pensamiento relacional y apoya un enfoque de razonamiento proporcional sin recurrir a métodos formulistas o abstractos.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

La capacidad de comprender las relaciones en las que las cantidades interactúan en direcciones opuestas es un aspecto clave del pensamiento multiplicativo flexible. A diferencia de las proporciones directas, las relaciones inversas exigen un tipo diferente de conciencia estructural. Según el marco DiToM, dominar esto ayuda a los alumnos a ampliar su razonamiento cuantitativo y los prepara para temas avanzados como problemas de trabajo, tasas y pensamiento funcional. Situaciones como esta también cultivan las habilidades del alumnado para modelar y dar sentido a las relaciones del mundo real utilizando herramientas matemáticas.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Algunos estudiantes pueden malinterpretar el escenario como un caso de proporción directa, asumiendo que reducir el tiempo también debería reducir el número de golpes, lo que podría llevarles a respuestas incorrectas como 1 golpe o 2 golpes. Otros pueden aplicar estrategias aritméticas de forma inconsistente o invertir la proporcionalidad, dividiendo el número de golpes en lugar de aumentarlos. Un error frecuente es tratar la situación de forma aditiva en lugar de multiplicativa (por ejemplo, «2 es 4 menos que 6, así que resta 4 golpes»). Estos patrones indican una falta de familiaridad con las estructuras inversas y el papel de la escala en direcciones opuestas.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

La enseñanza puede comenzar con modelos visuales o ejemplos concretos que muestren cómo más personas o dispositivos trabajando juntos completan una tarea más rápidamente. El uso de líneas numéricas dobles o tablas estructuradas como la anterior ayuda a hacer explícitas las relaciones multiplicativas. También es útil plantear preguntas guiadas, como «¿Qué pasa si necesitas terminar en la mitad de tiempo?» o «¿Cómo cambia el tiempo cuando se duplica el número de grifos?». Proporcionar tareas de comparación por pares, una directa y otra inversa, puede ayudar a resaltar las diferencias estructurales. Animar al alumnado a explicar su razonamiento en voz alta o a comparar diferentes vías de solución también refuerza la comprensión.

Tarea 2.3: Identificación de relaciones proporcionales en representaciones tabulares

Haz una cruz si el precio que pagamos es directamente proporcional al número de pasteles que compramos.

a. Tabla 1

Pasteles	1	2	5
Precio	5	10	50

☐

b. Tabla 2

Pasteles	1	2	5
Precio	11	12	15

☐

c. Tabla 3

Pasteles	1	2	5
Precio	3	6	15

☒

Solución

Dos estrategias comunes para identificar la proporcionalidad directa entre dos variables:

1) Cuando se comparan dos proporciones cualesquiera (por ejemplo, en la tabla 1: 1:5 y 2:10), las variables deben cambiar en la misma proporción (en este caso, 2). Sin embargo, al comparar 1:5 y 5:50, las variables cambian en proporciones diferentes: 5 y 10. Por lo tanto, la tabla 1 no representa una relación proporcional.

2) En cada proporción, el cociente de las variables debe ser el mismo (por ejemplo, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ o , $\frac{5}{1} = \frac{10}{2}$). En esta tarea, el cociente $\frac{precio}{número\ de\ pasteles}$ puede interpretarse como el precio por galleta. En la tabla 1, el precio por galleta es 5/1 = 5, 10/2 = 5, 50/5 = 10 , dependiendo de cuántas galletas compremos. Por lo tanto, la tabla 1 no representa una relación proporcional.

Tabla 1, estrategia 1 representada en una tabla:

Factor		2		2,5	
Pasteles	1		2		5
Precio	5		10		50
Factor		2		5	

No está bien

Tabla 1, estrategia 2 presentada en una tabla:

Pasteles	1	2	5
Precio	5	10	50
Cociente	5	5	10

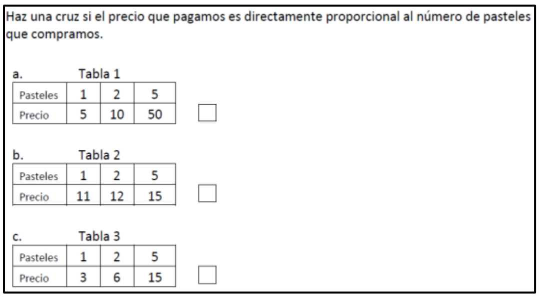
No válido (precios diferentes: 5, 5 y 10 por galleta)

En la tabla 2 se puede observar fácilmente que las proporciones 11:1 y 12:2 no son iguales. Por lo tanto, no es necesario realizar más cálculos para llegar a la conclusión de que las variables no son proporcionales.

En la tabla 3, el precio unitario es 3 para cada una de las proporciones y, por lo tanto, las variables son directamente proporcionales.

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para analizar datos a partir de tablas y determinar si existe una relación proporcional entre dos cantidades. En cada una de las tres tablas, se espera que el alumnado examine si la relación entre las columnas puede describirse mediante un factor multiplicativo constante, que es la característica definitoria de la proporcionalidad directa. El alumnado debe marcar con una cruz si la tabla es directamente proporcional.



Haz una cruz si el precio que pagamos es directamente proporcional al número de pasteles que compramos.

a. Tabla 1

Pasteles	1	2	5
Precio	5	10	50

☐

b. Tabla 2

Pasteles	1	2	5
Precio	11	12	15

☐

c. Tabla 3

Pasteles	1	2	5
Precio	3	6	15

☐

Para resolver esta tarea con éxito, se ofrecen algunos ejemplos de resolución:

- Comprueba si los cocientes (por ejemplo, y : x) son constantes en todas las filas
- O comprueba si la multiplicación cruzada da productos equivalentes.
- O identifica si se aplica una regla consistente como «multiplicar por 3» o «duplicar».

Esta forma de análisis requiere prestar atención a la estructura numérica y a los patrones multiplicativos subyacentes, no solo a las características superficiales.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comprender las relaciones proporcionales es una parte fundamental del pensamiento funcional y algebraico. Dentro del marco DiToM esta tarea favorece el desarrollo del razonamiento relacional, especialmente el reconocimiento de la estructura en los datos. La capacidad de determinar si una relación es proporcional sienta las bases esenciales para interpretar funciones lineales, problemas de escala y representaciones gráficas. También fomenta la flexibilidad a la hora de trabajar con diferentes representaciones: tablas, gráficos, descripciones verbales y ecuaciones.

¿Qué tipo de errores y otras señales de advertencia se pueden esperar con esta tarea?

Algunos estudiantes pueden tratar las relaciones como proporcionales basándose en aumentos superficiales (por ejemplo, «ambos números se hacen más grandes») sin verificar la constancia de la proporción. Otros pueden comparar diferencias absolutas en lugar de proporciones, confundiendo el razonamiento aditivo con el multiplicativo. Por ejemplo, si ambos valores aumentan en 2, los estudiantes podrían concluir erróneamente que son proporcionales. También pueden surgir errores por cálculos descuidados (por ejemplo, dividir incorrectamente u omitir valores). Estos patrones reflejan habilidades poco desarrolladas en la comparación multiplicativa, la interpretación de tasas y la generalización simbólica. En algunos casos, el alumnado puede clasificar erróneamente una tabla no proporcional debido a la presencia de números de aspecto simple o cruzar todas las tablas para evitar el análisis. Estas tendencias ponen de relieve la necesidad de estrategias de estructuración más sólidas y de confianza en la verificación.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Un apoyo eficaz incluye proporcionar al alumnado herramientas para comprobar la proporcionalidad de forma sistemática, como calcular las proporciones fila por fila, utilizar el análisis de la tasa unitaria o ayudas visuales como las líneas numéricas dobles. El profesorado puede mostrar cómo explicar los resultados verbalmente («Como 6 : 2 = 3 y 9 : 3 = 3, la razón es constante») y animar al alumnado a utilizar listas de verificación al analizar las tablas. Las tareas de debate por parejas, en las que los alumnos y alumnas defienden si una tabla es directamente proporcional, pueden profundizar el razonamiento. Vincular las tablas con situaciones proporcionales del mundo real (por ejemplo, recetas, precios, velocidades) ayuda a afianzar la comprensión y fomenta la transferencia.

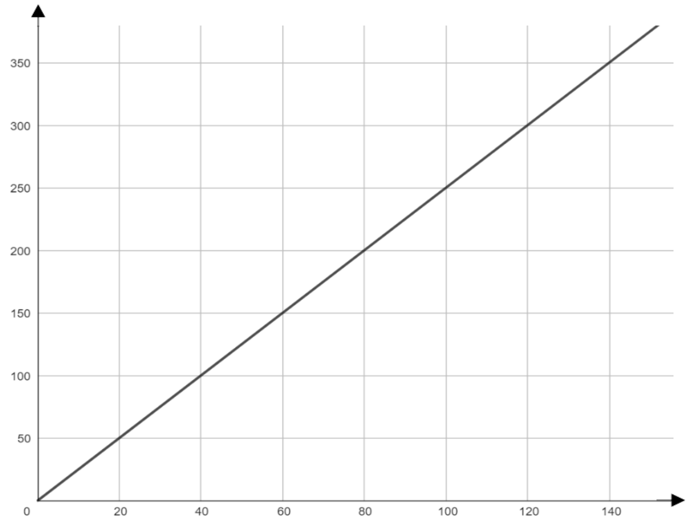
Tarea 2.4: Trabajo con gráficos en un contexto proporcional

El gráfico muestra la siguiente representación según los ejes X e Y:

Volumen de agua (en m3) en el eje X

Importe (en euros) en el eje Y

Importe (en €)



Volumen del agua (en m³)

a) Determina cuántos m^3 de agua obtienes por 200€

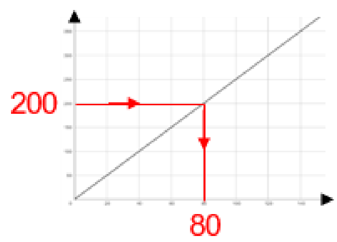
80 m^3

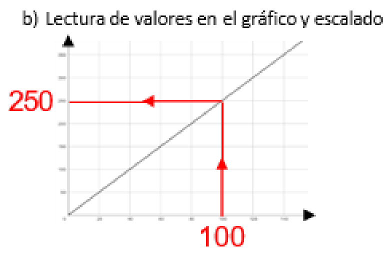
b) Determina el precio de 300 m^3 agua

750 €

Solución

a)





En la parte b) comenzamos observando que 100 m^3 cuesta 250 euros.

Continuamos argumentando que 300 m^3 cuesta 3 veces más que 100 m^3, y concluimos que 300 m^3 cuesta

$3 \cdot 250 = 750$ euros

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea de dos partes evalúa la capacidad del alumnado para interpretar y aplicar un gráfico lineal que representa una relación proporcional. En la parte a), la tarea consiste en leer un valor directamente del gráfico: determinar cuántos metros cúbicos de agua están disponibles por 200 €. En la parte b), el alumno o alumna debe determinar el precio de 300 m³ de agua, un valor que está fuera del rango visible del gráfico, y por lo tanto debe calcularlo basándose en la tasa de cambio observada en el gráfico.

La destreza clave reside en conectar la representación gráfica con el razonamiento proporcional subyacente y distinguir entre la lectura de gráficos y la extrapolación basada en modelos.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Leer e interpretar gráficos es una destreza matemática fundamental. Esta tarea sirve de puente entre la interpretación visual de datos y el pensamiento funcional. Según el marco DiToM, este tipo de actividad desarrolla la capacidad de: comprender la pendiente como una tasa, utilizar un gráfico como herramienta para la toma de decisiones, traducir entre representaciones gráficas, numéricas y verbales. Además, esta habilidad apoya las competencias en modelización matemática, especialmente en reconocer cuándo es necesario ampliar los datos mediante el razonamiento proporcional en lugar de la estimación

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

En la parte a), el alumnado puede leer mal los ejes (por ejemplo, desalineando los valores debido a una escala desconocida) o interpolar incorrectamente entre puntos. Si malinterpreta que el gráfico representa una relación continua, es posible que solo haga referencia a los valores etiquetados de la cuadrícula y se salte los puntos intermedios. En la parte b), algunos estudiantes pueden intentar extrapolar visualmente a pesar de que el gráfico termina en 140 m³, lo que da lugar a respuestas imprecisas o especulativas. Otros pueden no reconocer la estructura lineal y recurrir a conjeturas o estrategias no relacionadas. Otro error típico es malinterpretar la pendiente, por ejemplo, pensar que aumenta de forma no lineal o que cambia de forma impredecible más allá del rango visible. Estas dificultades pueden reflejar lagunas en la comprensión del crecimiento proporcional, la extrapolación lineal o las convenciones de lectura de gráficos (como la escala igual y la alineación de las líneas de la cuadrícula).

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El apoyo específico debe comenzar con ejercicios de lectura de gráficos escalonados que guíen al alumnado a alinear correctamente los valores en ambos ejes, reconocer tasas constantes y utilizar reglas o trazados para mantener la orientación. Para la extrapolación (parte b), la enseñanza debe hacer hincapié en cómo determinar la tasa unitaria a partir del gráfico (por ejemplo, 1 € por m³ o 5 € por 20 m³) y luego ampliar esa relación numéricamente o mediante una tabla. El profesorado también puede animar al alumnado a expresar con palabras «lo que dice el gráfico» (por ejemplo, «por cada 20 metros cúbicos, el coste aumenta en 50 €»), reforzando así las conexiones verbales, numéricas y visuales. Comparar el gráfico con la ecuación o la tabla de ratios correspondientes también refuerza el acceso flexible a la estructura subyacente.

Tarea 2.5: Resolución de un problema de división en un contexto del mundo real

En un tanque hay almacenados 810 litros de agua.

Cada día se extraen 30 litros de agua del tanque.

Calcula después de cuántos días estará vacío el tanque.

27 días

Solución

Los 30 litros que se extraen diariamente dan como resultado un$30 \cdot n$ es extraídos después de n días.

Primera solución, basada en la división: El número de días necesarios se puede expresar como

$\frac{810}{30} = \frac{81}{3}$=27

Segunda solución, basada en la multiplicación. Aquí representada en una tabla:

N.º de días	1	10	20	7	27
volumen	30	300	600	210	810

Destreza clave evaluada con esta tarea

En un tanque hay almacenados 810 litros de agua.
Cada día se extraen 30 litros de agua del tanque.
Calcula después de cuántos días estará vacío el tanque.

Esta tarea evalúa la capacidad de resolver un problema de división en un contexto basado en el tiempo, en el que una cantidad total (810 litros de agua) se agota a un ritmo diario constante (30 litros al día). La pregunta es cuántas extracciones diarias iguales se necesitan hasta que el depósito de almacenamiento esté completamente vacío. Esto implica interpretar la división como «cuántas veces cabe 30 en 810» o, de forma equivalente:

810 : 30 = 27 días

Esta interpretación requiere comprender la resta (o suma) repetida a lo largo del tiempo y la capacidad de traducir un proceso del mundo real en una operación simbólica.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Dentro del marco DiToM esta tarea apoya competencias clave en el razonamiento multiplicativo, el pensamiento funcional y la estructuración algebraica básica. El alumnado debe identificar la regularidad subyacente («30 litros al día») y extenderla a un proceso repetido. Esto también refuerza la comprensión de las tasas, la modelización del tiempo y la interpretación de la división en contextos no espaciales y orientados a procesos. Este razonamiento sustenta el aprendizaje posterior de funciones lineales, patrones de crecimiento y ecuaciones diferenciales.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

En la práctica, muchos estudiantes abordan la tarea con las siguientes estrategias:

- Resta repetida: restar 30 de 810 una y otra vez y contar los pasos.
- Suma repetida: sumar 30 cada vez hasta llegar a 810 y luego contar el número de pasos.
- Errores de estimación: saltar a números que suenan plausibles, como 30 o 25.
- Errores aritméticos al realizar divisiones largas o al colocar mal los puntos decimales.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El apoyo debe centrarse en ayudar al alumnado a construir un modelo interno de división equitativa a lo largo del tiempo. Los apoyos visuales, como barras divididas en partes iguales, rectas numéricas o calendarios, pueden facilitar la comprensión. El profesorado puede animar al alumnado a representar la situación con operaciones de división y a explicar lo que representa cada número. Relacionar este problema con rutinas de la vida real (por ejemplo, el consumo diario de agua, las raciones de comida, el presupuesto diario) puede ayudar a familiarizarse con él. Hacer hincapié en la agrupación estratégica, como dividir en bloques de 10 días ($10 \cdot 30 = 300$), fomenta el razonamiento eficiente y el control de la estimación.

Tarea 2.6: Combinación de costes fijos y variables en un contexto del mundo real

Carlos invitó a 15 amigos a su fiesta de cumpleaños.

Tiene que pagar 50 € por la sala de juegos y 10 € adicionales por cada amigo invitado.

¿Cuánto tendrá que pagar Carlos por su fiesta de cumpleaños?

200 euros

Solución

Carlos tiene que pagar 50 euros por la sala de juegos, como coste inicial.

Además, Carlos tiene que pagar 10 euros por cada uno de sus 15 amigos. Eso supone un coste adicional de15 · 10 = 150 euros.

El coste total es de 50 + 150 = 200 euros.

Destreza clave evaluada con esta tarea

> Carlos invitó a 15 amigos a su fiesta de cumpleaños.
>
> Tiene que pagar 50 € por la sala de juegos y 10 € adicionales por cada amigo invitado.
>
> ¿Cuánto tendrá que pagar Carlos por su fiesta de cumpleaños?

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para aplicar modelos algebraicos básicos y operaciones aritméticas en un contexto del mundo real que implica costes fijos y variables. Se les dice a los estudiantes que Carlos gasta 50 € en una sala de juegos y 10 € adicionales por cada amigo invitado. La tarea consiste en determinar el coste total de la celebración del cumpleaños.
La estrategia esperada es:

1. Calcular el coste variable: 15 cadenas · 10 € = 150 €
2. Sumar el coste fijo:
   150 € + 50 € = 200 € de coste total

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Esta tarea sienta bases importantes para el pensamiento funcional y el álgebra temprana, en particular el concepto de modelos lineales. Dentro del marco DiToM favorece el desarrollo de habilidades de modelización matemática, fluidez operativa e interpretación de expresiones simbólicas en situaciones aplicadas. Comprender la distinción entre componentes fijos y variables es fundamental en muchos contextos de la vida real, como la elaboración de presupuestos, la fijación de precios y la planificación de recursos. Además, esta tarea refuerza la capacidad del alumnado para estructurar problemas de varios pasos, una característica clave de la resolución de problemas matemáticos de nivel intermedio.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Un error común es que el alumnado solo calcule el coste variable y omita el coste fijo. Esto revela una comprensión parcial de la estructura de la tarea, en la que solo se tiene en cuenta un componente (a menudo el más fácil de calcular). Otros estudiantes pueden invertir los pasos (por ejemplo, restar 50 € de 150 €) o malinterpretar la función de cada número. Algunos pueden multiplicar erróneamente todos los valores o intentar operaciones innecesarias, lo que refleja una interpretación deficiente de la configuración del problema. Estos errores indican deficiencias en la lectura de tareas de varios pasos, en la correspondencia entre cantidades del mundo real y operaciones, y en la integración de diferentes componentes numéricos en una única solución coherente.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El profesorado puede ayudar al alumnado estructurando el problema de forma visual, por ejemplo, utilizando una tabla con dos filas (fijas y variables) o representando gráficamente el coste total como una barra dividida en dos partes. Enseñar y practicar explícitamente la fórmula «total = fijo + variable» en diferentes contextos puede ayudar a familiarizarse con los modelos lineales.

Además, animar al alumnado a releer la pregunta y verificar si su respuesta incluye «todos» los costes, fomenta la comprobación metacognitiva. El uso de problemas verbales que aíslan los costes fijos de los variables antes de combinarlos puede facilitar la comprensión paso a paso. Por último, verbalizar la situación (por ejemplo, «Tiene que pagar 50 € en cualquier caso y 10 € más por cada invitado») vincula más claramente el lenguaje y la estructura matemática.

Tarea 3.1: Conversión de una fracción en un porcentaje

Expresar como porcentaje la fracción $\frac{3}{5}$

a) 0,6 %

b) 6 %

c) 35 %

d) 60 %

Solución

Primera solución, ampliando un dato numérico:

- $\frac{1}{5}$ = 0,20 = 20% , por lo tanto $\frac{3}{5}$ = 3 · 20% = 60%

Segunda solución, ampliando la fracción:

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$ = 60%

Tercera solución, basada en la división:

$\frac{3}{5}$= 0,6 = 0,60 = 60%

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para convertir una fracción conocida (tres quintos) en un porcentaje. Para resolverla, los alumnos deben comprender la relación entre fracciones y porcentajes y reconocer que:

3⁄5 = 0,6 = 60 %

3/5 = 60/100 = 60 %

Expresar como porcentaje la fracción $\frac{3}{5}$

a) 0,6 %
b) 6 %
c) 35 %
d) 60 %

Esto implica convertir primero la fracción en un decimal (dividiendo el numerador por el denominador) y luego multiplicar por 100, o bien aplicar equivalencias conocidas entre fracciones y porcentajes. Por lo tanto, la tarea requiere tanto destrezas de cálculo como comprensión conceptual de las representaciones proporcionales.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

La conversión entre fracciones, decimales y porcentajes es fundamental en muchos contextos de la vida real (por ejemplo, la interpretación de estadísticas, descuentos o comparaciones de datos). Dentro del marco DiToM esta competencia favorece la comprensión racional de los números, la flexibilidad numérica y la traducción simbólica. Prepara al alumnado para tareas que implican el crecimiento porcentual, las comparaciones y el razonamiento proporcional en álgebra y alfabetización de datos. El dominio de esta área también fomenta la confianza a la hora de navegar entre diferentes representaciones de partes y totales, lo cual es esencial en todos los ámbitos de las matemáticas.

¿Qué tipo de errores y otras señales de advertencia se pueden esperar con esta tarea?

Muchos estudiantes tratan erróneamente la fracción como un decimal o confunden las funciones del numerador y el denominador. Por ejemplo:

- Seleccionar 0,6 % sugiere que los estudiantes interpretan erróneamente que 0,6 ya es un porcentaje.
- Elegir el 6 % probablemente se deba a que se ha movido incorrectamente el punto decimal una vez.
- El 35 % puede ser el resultado de confundir tres quintos.

Estos errores indican confusión entre valores relativos, desplazamiento de decimales y el significado de porcentaje («por cada cien»). Revelan la necesidad de una mayor comprensión de cómo las fracciones se corresponden con la escala de porcentajes basada en el cien.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El profesorado puede ayudar al alumnado utilizando modelos visuales (por ejemplo, cuadrículas de 100, gráficos circulares) para mostrar cómo fracciones como 3/5 corresponden a 60 cuadrados sombreados de 100. Las actividades estructuradas que convierten repetidamente fracciones de referencia comunes en porcentajes (como 1/2, 1/4, 3/4, 3/5) pueden familiarizar al alumnado y afianzar su comprensión.

Animar al alumnado a convertir siempre primero a decimales y luego multiplicar por 100 proporciona una rutina fiable. Las rectas numéricas y las barras de porcentajes pueden reforzar aún más la idea de representaciones equivalentes. Las explicaciones verbales («¿tres de cinco es igual a cuántos de cien?») ayudan a consolidar el pensamiento proporcional.

Tarea 3.2: Cálculo de un aumento porcentual

Si 30 se aumenta en un 50 % el resultado es:

a) 80

b) 45

c) 35

d) 15

Solución

Primera solución, basada en interpretar el 50 % como «la mitad»: El aumento es la mitad de 30, es decir, 15. El resultado tras aumentar 30 en 15 es 30 + 15 = 45 .

De manera más formal, con división:

50% of 30 = $\frac{30}{2}$ = 15 Total: 30 + 15 = 45.

Segunda solución, basada en calcular el aumento del 50 % mediante multiplicación: El aumento es

50% of 30 = 0,50 · 30 = 5 · 3 = 15 Total: 30 + 15 = 45.

Tercera solución, basada en interpretar el resultado como el 150 % de 30:

150% of 30 = 1,50 · 30 = 15 · 3 = 45

Destreza clave evaluada con esta tarea

Esta tarea evalúa si el alumnado es capaz de interpretar y aplicar correctamente un aumento porcentual a un valor base dado. El valor inicial es 30 y la instrucción es aumentar este valor en un 50 %. Para llegar a la solución correcta, el alumnado debe determinar cuánto es el 50 % de 30 y luego sumarlo a la cantidad original.

Si 30 se aumenta en un 50 % el resultado es:

a) 80
b) 45
c) 35
d) 15

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

La capacidad de calcular e interpretar aumentos porcentuales es una competencia fundamental tanto en la vida cotidiana como en contextos matemáticos avanzados. Es esencial para comprender los cambios en los precios, el crecimiento demográfico, los intereses financieros y las comparaciones estadísticas. Según el marco DiToM, el razonamiento relacionado con los porcentajes favorece el desarrollo del pensamiento funcional, el razonamiento proporcional y la integración de estructuras multiplicativas en distintos contextos. Esta tarea en particular refuerza la flexibilidad del alumnado a la hora de cambiar entre interpretaciones aditivas y multiplicativas de los porcentajes y contribuye a su capacidad para hacer generalizaciones y aplicar el razonamiento basado en estructuras en problemas cada vez más abstractos.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta pueden esperarse en esta tarea?

Un error común que se observa en las respuestas del alumnado es la confusión entre valores absolutos y valores porcentuales relativos. Algunos estudiantes pueden sumar erróneamente 50 a 30 en lugar del 50 % de 30, llegando a una respuesta incorrecta de 80. Esto indica una mala comprensión de la naturaleza fundamental del porcentaje como medida relativa. Otro grupo de estudiantes podría seleccionar 15 como respuesta, interpretando erróneamente que la tarea solo pide el 50 % de 30, en lugar de calcular el valor total aumentado. Otros podrían elegir 35 debido a pequeños errores de cálculo o a una estimación errónea durante el cálculo mental. También es posible que el alumnado lea mal o malinterprete la redacción del problema, asumiendo que se trata de una tarea de resta o diferencia, o que se basen en la intuición en lugar de en un cálculo estructurado. Estas respuestas revelan lagunas en la comprensión conceptual, la fiabilidad de los procedimientos y la comprensión lectora. También pueden indicar una internalización insuficiente de las operaciones con porcentajes como procesos multiplicativos escalables y la necesidad de una práctica más guiada para distinguir entre parte, todo y tasa de crecimiento.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

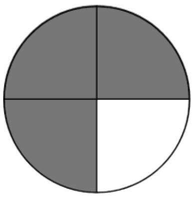
El profesorado puede proporcionar apoyo modelando situaciones del mundo real en las que se producen aumentos porcentuales de forma natural, como subidas de precios, aumentos salariales o crecimiento de la población, fundamentando así los conceptos abstractos en ejemplos tangibles. Las ayudas visuales, como las barras porcentuales o las líneas numéricas dobles, pueden ayudar al alumnado a visualizar cómo un aumento del 50 % amplía la cantidad original.

Una instrucción explícita sobre cómo distinguir la base, el porcentaje y el resultado dentro de un marco estructurado puede evitar confusiones y favorecer una comprensión más sólida. Además, el uso de estrategias tanto aditivas (por ejemplo, «encontrar el 50 % y luego sumar») como multiplicativas (por ejemplo, «multiplicar por 1,5») y el hecho de animar a los alumnos a verificar los resultados con estimaciones ayudan a promover la flexibilidad estratégica.

Tarea 3.3: Interpretar representaciones circulares y convertirlas en porcentajes

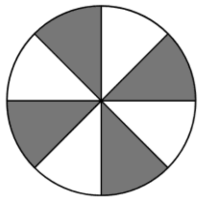
Una parte del círculo está coloreada. Expresa la parte en porcentaje.

a)



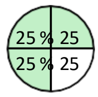
Parte del círculo coloreada: _**75**_%

b)



Parte del círculo coloreada: __**50**_%

Solución



a) Cada una de las cuatro partes es el 25 % del círculo.

Por lo tanto, 3 partes son el3 · 25% = 75% del círculo.

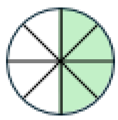
Este razonamiento se puede apoyar dibujando una imagen.

b) Cada una de las ocho partes representa el 12,5 % del círculo (la mitad del 25 %).

Por lo tanto, 4 partes son el4 · 12,5% = 50% o del círculo.

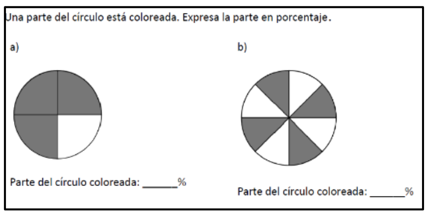
Otra forma de resolver el problema es interpretar que la parte coloreada está formada por 4 de las 8 «porciones». Por lo tanto, la parte coloreada son 4 porciones y el total son 8 porciones, lo que lleva directamente a la interpretación «mitad» = 50 %, o al cálculo

$$\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2} = 50\ \%$$



La respuesta 50 % también se puede obtener reorganizando las cuatro cuñas para que la «mitad» aparezca más claramente.

Destreza clave evaluada con esta tarea


Una parte del círculo está coloreada. Expresa la parte en porcentaje.

a)

b)

Parte del círculo coloreada: _____%

Parte del círculo coloreada: _____%

Esta tarea evalúa la capacidad para interpretar partes de un todo a partir de una representación visual —en este caso, un círculo dividido en sectores iguales— y convertir estas partes en porcentajes.

- La parte a) muestra un círculo dividido en cuatro sectores iguales, tres de los cuales están sombreados.
- La parte b) presenta un círculo dividido en ocho sectores iguales, en el que cada segundo sector está sombreado, lo que da como resultado cuatro sectores sombreados de ocho.

En ambos casos, la solución correcta requiere reconocer la fracción del círculo que está sombreada y convertirla en un porcentaje. Esta tarea implica traducir cantidades visuales en números racionales o fracciones y luego en porcentajes, lo que demuestra fluidez en las representaciones.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

La conversión entre modelos visuales, fracciones y porcentajes es una habilidad fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Favorece una comprensión más profunda de las relaciones entre las partes y el todo, el razonamiento proporcional y la estimación. Según el marco DiToM, tareas como esta refuerzan la flexibilidad conceptual y la capacidad de conectar representaciones matemáticas, una característica fundamental de la alfabetización matemática. Esta destreza también es muy relevante en contextos de la vida real, como la interpretación de gráficos, estadísticas y visualizaciones de datos, donde las relaciones entre partes y el todo suelen estar integradas visualmente y expresadas en porcentajes.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Un error común observado en ambas partes de la tarea es identificar cuántas partes están sombreadas, pero luego informar incorrectamente este recuento como porcentaje. Por ejemplo, en la parte a), los estudiantes podrían responder «3» porque tres de las cuatro partes están sombreadas, confundiendo el recuento con el porcentaje equivalente. Del mismo modo, en la parte b), el alumnado suele escribir «4» porque cuatro de los ocho sectores están sombreados, pasando por alto la necesidad de convertir la fracción 484⁄884 en un porcentaje. Estos errores reflejan un procesamiento superficial de los datos visuales, en el que el alumnado cuenta los segmentos sombreados, pero no completa la traducción conceptual a la forma porcentual. Otro problema frecuente es no reconocer la regularidad en la parte b), ya que los sectores sombreados alternos ocultan la impresión visual inmediata de «la mitad». Como resultado, algunos pueden juzgar erróneamente que es menos del 50% debido al patrón irregular. Estos errores indican la necesidad de reforzar las habilidades para tender puentes entre las representaciones concretas y abstractas, especialmente en la traducción entre recuentos, fracciones y porcentajes.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El profesorado puede trabajar con ayudas visuales estructuradas, como cuadrículas de 100, gráficos circulares o barras de fracciones, para mostrar explícitamente cómo se relacionan las partes fraccionarias con los porcentajes. Animar al alumnado a nombrar primero la fracción (por ejemplo, «3 de 4») antes de convertirla en porcentaje ayuda a aclarar el paso intermedio. También es útil practicar con fracciones de referencia conocidas (por ejemplo, 1⁄2, 1⁄4) y sus porcentajes correspondientes. Además, se puede modelar este proceso en voz alta: «Hay 4 partes iguales y 3 están sombreadas. Por lo tanto, son tres cuartos. ¿Qué es tres cuartos en porcentaje?». Las actividades que implican emparejar modelos visuales, fracciones, decimales y porcentajes también pueden reforzar la comprensión entre representaciones.

Tarea 3.4: Cálculos con números negativos

Obtén el número que falta:

a) $12 - (-5) = \_\mathbf{17}\_\_$

b) $11 \cdot \_\mathbf{(-4)}\_\_ = -44$

Solución

La parte a) se puede resolver recordando que «menos menos es igual a más» (más exactamente: restar un número negativo da el mismo resultado que sumar el número positivo correspondiente). Basándonos en este principio, el cálculo es sencillo:

$12 - (-5) = 12 + 5 = 17$

La parte b) se puede resolver observando primero que el producto -44 es un número negativo, mientras que el primer factor 11 es un número positivo. Por lo tanto, la respuesta a b) tiene que ser un número negativo. El número positivo correspondiente completa la multiplicación $11 \cdot \_\_\_\_\_ = 44$. Dado que este número (positivo) es 4, la respuesta a b) es -4.

Destreza clave evaluada con esta tarea

Obtén el número que falta:

a) $12 - (-5) = \_\_\_\_\_\_$

b) $11 * \_\_\_\_\_ = -44$

Esta tarea se centra en la capacidad del alumnado para razonar sobre los efectos de la suma, la resta y la multiplicación con números negativos. Requiere que se calcule teniendo en cuenta la interpretación correcta de los signos (+ y −).

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Comprender el comportamiento de los números negativos en las operaciones básicas es esencial para la fluidez algebraica. Esta tarea requiere que el alumnado aplique la regla de los signos conocida, desarrollando la capacidad de manipular mentalmente expresiones con signos basándose en la comprensión estructural, y no solo en los procedimientos. Dentro del marco DiToM esta tarea fomenta el sentido de los símbolos, la flexibilidad estructural y el razonamiento conceptual sobre las operaciones y el orden de magnitudes, elementos fundamentales para resolver ecuaciones, comprender el comportamiento de las funciones y evaluar expresiones algebraicas.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

En la parte a), muchos estudiantes restan incorrectamente 5 de 12, malinterpretando los signos de resta. En la parte b), algunos pueden insertar un número entero positivo sin tener en cuenta la regla de los signos para la multiplicación. Por otra parte, algunos pueden asociar la resta solo con resultados «más pequeños» y no razonar de forma estructural. Estos errores indican una comprensión frágil de las reglas de operación con números negativos, especialmente en los casos que implican signos anidados o paréntesis. También muestran si el alumnado es capaz de pensar hacia atrás a partir de un resultado, una habilidad esencial en álgebra.

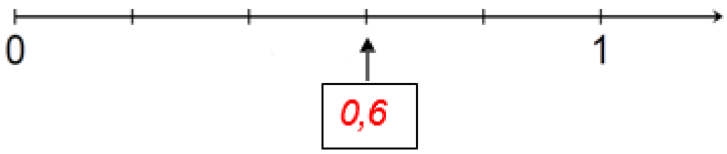
¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

El alumnado se beneficia de tareas que contrastan explícitamente las combinaciones de signos (por ejemplo, (+)(+), (+)(−), (−)(+), (−)(−)) con modelos visuales, como rectas numéricas o fichas de colores. Los profesores pueden proporcionar estructuras de frases, por ejemplo, «Restar un número negativo es lo mismo que...», y ayudar a los alumnos a verbalizar las operaciones. Hacer que el alumnado genere ejemplos en los que varíen deliberadamente los signos y observen el resultado puede ayudarles a interiorizar los patrones. En la parte b), concretamente, introducir el triángulo de la multiplicación (factor × factor = producto) y trabajar hacia atrás a partir del producto ayuda al alumnado a deducir lógicamente los signos que faltan. En última instancia, la práctica regular de tareas inversas —trabajar desde los resultados hacia las entradas— puede desarrollar un pensamiento algebraico más sólido.

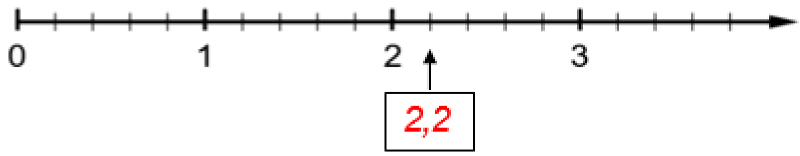
Tarea 3.5: Identificar valores decimales en una recta numérica

Nombra las posiciones marcadas de la recta numérica con una fracción.

a)



b)



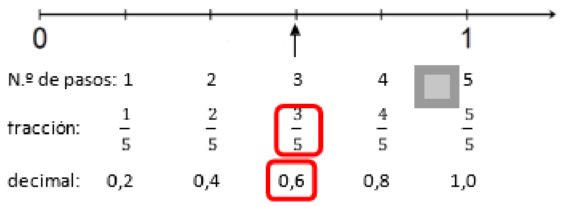
Solución

Dos estrategias posibles:

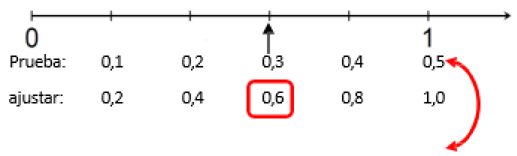
1) Contar el número de pasos (o subintervalos) de 0 a 1;

2) Probar secuencias de números decimales (o fracciones) de 0 a 1.

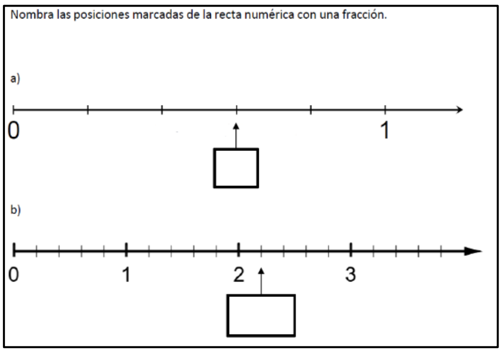
Primera solución a): En detalle, la primera estrategia se puede implementar contando 5 pasos de 0 a 1



Segunda solución: Una posibilidad es probar 0,1 para la primera posición a la derecha de 0. Esta elección de 0,1 da como resultado 0,5, que no encaja con 1 en la recta numérica. Cambiar a 0,2 da como resultado 1,0, que encaja con 1 en la recta numérica



Destreza clave evaluada con esta tarea



Esta tarea evalúa la capacidad del alumnado para identificar y escribir números decimales basándose en su posición en una recta numérica. Ambas partes implican interpretar marcas espaciadas uniformemente entre números enteros y asignar el valor decimal correcto a la posición indicada.

La tarea requiere que el alumnado combine la interpretación de la recta numérica, la comprensión de los decimales y el razonamiento proporcional.

¿Por qué es esta habilidad una destreza clave?

Las rectas numéricas ofrecen una representación visual muy eficaz de los números racionales, reforzando tanto la magnitud como la posición relativa. La capacidad de interpretar posiciones fraccionarias o decimales en una recta numérica es fundamental para comprender la equivalencia, la densidad y las operaciones con números racionales. Según Treppo y van den Heuvel-Panhuizen (2014), esta tarea favorece el desarrollo del sentido numérico mental, la representación de números racionales y la capacidad de localizar y razonar con flexibilidad sobre los números entre valores enteros. Estas habilidades son cruciales no solo en la teoría de números, sino también en la medición, la interpretación de datos y el modelado algebraico.

¿Qué tipo de errores y otras señales de alerta se pueden esperar con esta tarea?

Los estudiantes que tienen dificultades con esta tarea suelen:

- Contar mal las marcas, por ejemplo, confunden la tercera marca con 0,3 en lugar de 0,6 en la parte a), al suponer que cada marca equivale a 0,1 sin verificar el intervalo basado en el número de acciones asignadas.
- En la parte b), el alumnado puede escribir 2,25 en lugar de 2,2, haciendo una estimación aproximada o recurriendo a estructuras decimales más familiares.
- Otros pueden no reconocer el tamaño del incremento, especialmente cuando los segmentos no se corresponden con décimas, y por lo tanto utilizan valores de paso incorrectos.
- La falta de precisión al leer los valores de los gráficos también es una señal de advertencia de que el alumnado aún no se siente del todo cómodo con la división no estándar de las rectas numéricas.

Estos errores sugieren deficiencias en la división proporcional, la comprensión de los decimales o la lectura cuidadosa de los datos visuales.

¿Qué tipo de apoyo se podría brindar a los alumnos y alumnas que muestran deficiencias en esta tarea?

Para reforzar esta habilidad, el alumnado se beneficia del trabajo práctico con rectas numéricas dibujadas e interactivas, en las que ellos mismos etiquetan los valores y justifican su ubicación. El profesorado puede facilitar el proceso preguntando: «¿Cuál es la distancia entre dos marcas?» y «¿En cuántas partes se divide este intervalo?». El uso de códigos de colores para cada intervalo o tiras numéricas que enfatizan las divisiones uniformes puede ayudar a mejorar la estimación y el conteo. Reforzar las equivalencias entre fracciones comunes y decimales (por ejemplo, 1/4 = 0,25, 1/5 = 0,2) también ayuda al alumnado a colocar los números correctamente con mayor fluidez. Por último, la práctica frecuente con rectas numéricas ampliadas (entre 0 y 1 o entre 2 y 3) entrena al alumnado a razonar proporcionalmente y a evitar la generalización excesiva a partir del pensamiento de números enteros.

VI. Evaluación científica

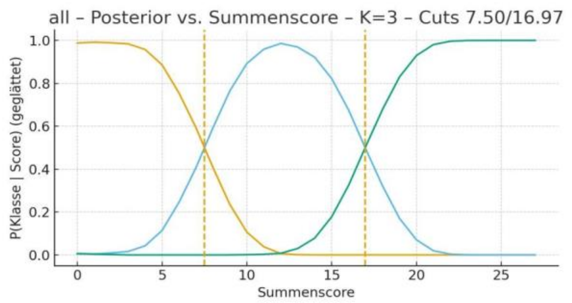
Esta prueba DiToM screening 6+ se desarrolló sobre la base de la teoría y se probó como parte de un estudio de validación no representativo. Los resultados que se presentan a continuación sirven para identificar a los alumnos y alumnas que pueden estar en riesgo debido a la falta de destrezas matemáticas clave para el aprendizaje posterior de las matemáticas en la escuela. La prueba ayuda al profesorado, al final del 6.º curso de Primaria y al comienzo del 1.º de ESO, a realizar una evaluación empírica del rendimiento de los alumnos e identificar a aquellos con resultados destacados para ofrecerles un apoyo adecuado en una fase temprana.

Descripción de la muestra y resultados principales

La prueba se llevó a cabo entre junio y julio de 2025, durante las últimas tres semanas del curso escolar 2024-2025, con 1321 alumnos y alumnas de escuelas de Alemania, Croacia, España, Francia, Grecia, Italia y Suecia.

La prueba consta de las siguientes partes: habilidades aritméticas básicas con 9 ítems, proporcionalidad con 7 ítems y cálculos técnicos con 8 ítems. Si un ítem se resolvía correctamente, se otorgaba 1 punto; si la solución era incorrecta, incompleta o faltaba, se otorgaban 0 puntos. La prueba se llevó a cabo según criterios estandarizados (véase IV. Realización de la prueba DiToM) y se evaluó. Dado que la prueba está diseñada como una prueba de selección que identifica al alumnado que puede estar en situación de riesgo, se esperaban y deseaban fuertes efectos techo (es decir, no una distribución normal, sino una distribución sesgada hacia la izquierda). Esto se confirmó en la prueba piloto.

Para una comunicación orientada a la práctica, no se especifica un único valor umbral, sino dos valores umbral que diferencian entre los estudiantes potencialmente en riesgo, los que tienen que seguir siendo observados y los que potencialmente no están en riesgo. La determinación de la puntuación de corte se basó en datos obtenidos mediante un análisis de clases latentes con tres clases claramente diferenciables. Las clases no se superponen y son monotónicas. Las probabilidades a posteriori de la asignación de clases se representaron gráficamente en función de la puntuación, se ajustaron y se utilizaron para determinar los umbrales críticos para las decisiones de asignación en relación con sus puntos de intersección (véase la figura 1). Se utilizaron los puntos de intersección de las curvas (probabilidad a posteriori p = 0,5).

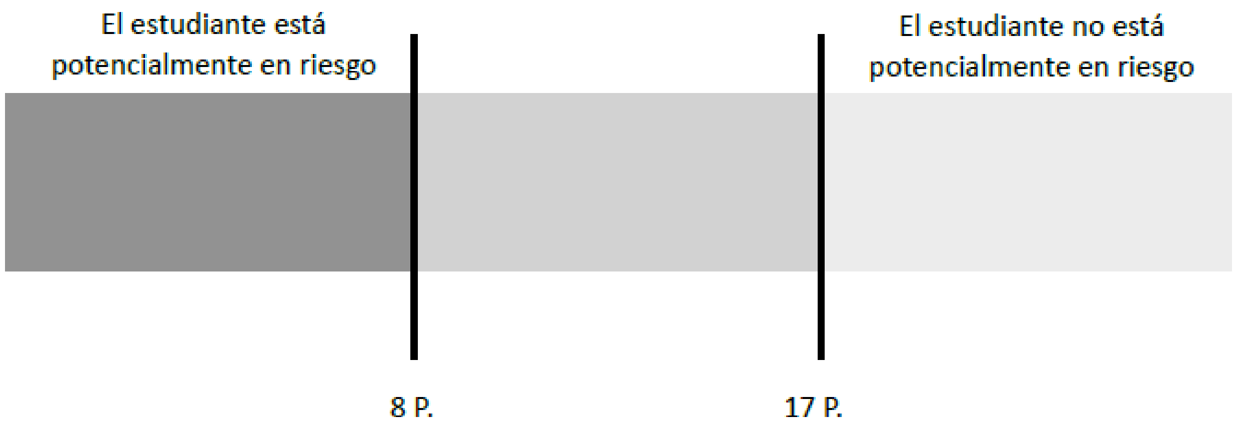


El análisis de clases muestra tres clases claramente diferenciadas, K1→ estudiantes con un rendimiento débil en la prueba de selección, K2→ estudiantes con un rendimiento algo débil en la prueba de selección y K3→ estudiantes con un rendimiento poco llamativo en la prueba de selección. Para determinar la puntuación crítica, se seleccionó el umbral hasta el cual existe una probabilidad del 50 % de estar en la clase con un rendimiento deficiente en la prueba. Por lo tanto, este primer umbral es de 8 puntos. El alumnado que haya obtenido una **puntuación de 8** puntos o menos necesita apoyo para trabajar los conceptos básicos, con el fin de poder desarrollar los siguientes contenidos de las clases de matemáticas de forma orientada a la comprensión. El segundo umbral es de 17 puntos. El alumnado que haya obtenido una **puntuación entre 8 y 17 puntos** debe ser observado en las clases de matemáticas durante las próximas semanas para ver si comprende los contenidos tratados y pueden aplicarlos de forma independiente.

VII. Hoja de evaluación

Hoja de evaluación para Screening 8+

Parte 1	____ /9
Parte 2	____ / 7
Parte 3	____ / 8
Suma	____ / 24



Referencias:

Brings, L., & Kleine, M. (2025). *Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education*. In Proceedings of EDULEARN25 Conference. Palma, Spain.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York: Macmillan.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Arithmetik: Grundschule* (8. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fraction development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction, 14*(5), 469–484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012